

Ονοματεπώνυμο.....

....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό

Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

Θέμα 1^ο

A1. Στο γραπτό σας, να γράψετε το αριθμό της πρότασης και δίπλα τις λέξεις «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», αν είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

I. Αν A και B δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης τότε ισχύει
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

II. Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε
 $a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}$.

III. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε $\beta^2 = \alpha\gamma$. (μονάδες 6)

A2. Στο **γραπτό** σας να αναγράψετε τη λέξη που συμπληρώνει το κενό στην φράση:

«Ο αριθμός $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται μέσος των α και γ .»

(μονάδες 2)

A3. Στο **γραπτό** σας να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Όταν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ έχει διακρίνουσα αρνητική τότε

A. είναι πάντα θετικό B. δεν έχει ρίζες πραγματικές
Γ. έχει υποχρεωτικά $a > 0$ Δ. έχει πάντα αρνητικές ρίζες.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

B. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

και $\Delta > 0$ να αποδειχθεί ότι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$.

Μονάδες 15

Απαντήσεις

A1. Σ – Λ – Σ

A2. Αριθμητικός

A3. B

B. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}$ τότε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\beta}{2a} = -\frac{\beta}{a}$$

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

Μονάδες 13

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$ Μονάδες 12

Απαντήσεις

α) Για να υπολογίσουμε το $f(-1)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τύπο της συνάρτησης αφού $-1 < 0$ έτσι $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2$

Για να υπολογίσουμε το $f(3)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο τύπο αφού $3 \geq 0$ έτσι $f(3) = 3 - 1 = 2$

Άρα $f(-1) = f(3)$

β) Για $x < 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$ δεκτή

Για $x \geq 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή

Άρα οι τιμές που επαληθεύουν την εξίσωση $f(x) = 0$ είναι οι $x = -2$ και $x = 1$.

Θέμα 3ο

A. Να λυθούν οι ανισώσεις

i. $|x+1| < 5$, (1) στο σύνολο $\mathbb{Z}$, των ακεραίων. Μονάδες 5

ii. $4x^2 - 8x - 5 \leq 0$, (2) στο σύνολο $\mathbb{Z}$, των ακεραίων. Μονάδες 5

B. Έστω $\Omega = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα.

Αν A και B δύο ενδεχόμενα του πειράματος τύχης, όπου A το σύνολο λύσεων της (1) και B το σύνολο λύσεων της (2) τότε :

α. Να βρείτε τα ενδεχόμενα A, B.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, και $P(A - B)$ Μονάδες 4

γ. Αν Γ είναι ένα τρίτο ενδεχόμενο του πειράματος τύχης και οι αριθμοί $P(A)$, $P(\Gamma)$, $P(B)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε την $P(\Gamma)$.

Μονάδες 5

Απαντήσεις

A. i. $|x+1| < 5 \Leftrightarrow -5 < x+1 < 5 \Leftrightarrow -5-1 < x < 5-1 \Leftrightarrow -6 < x < 4$ άρα οι ακέραιες λύσεις που επαληθεύουν την ανίσωση είναι οι $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

ii. Το τριώνυμο $4x^2 - 8x - 5$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 64 + 80 = 144 > 0$ άρα έχει δύο ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{8 \pm 12}{8} \text{ δηλαδή } x_1 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \text{ και } x_2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $a=4$ δηλαδή θετικό στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

και $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ και ετερόσημο του a δηλαδή αρνητικό στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η ανίσωση $4x^2 - 8x - 5 \leq 0$ αληθεύει όταν $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο παραπάνω διάστημα είναι οι $0, 1, 2$.

B.

α) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα έχουμε $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ και $B = \{0, 1, 2\}$

β) Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα άρα σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ισχύει

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{9}{11} \text{ και } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{11}$$

Για την $P(A \cup B)$

α' τρόπος: ισχύει $B \subseteq A$ άρα $A \cup B = A$ και $P(A \cup B) = P(A) = \frac{9}{11}$

β' τρόπος $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(B) = P(A)$ γιατί

$$A \cap B = \{0, 1, 2\} = B$$

Για την $P(A - B)$

α' τρόπος: $A - B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 3\}$ άρα $P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{11}$

β' τρόπος: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B) = \frac{9}{11} - \frac{3}{11} = \frac{6}{11}$

γ) Αφού οι $P(A)$, $P(\Gamma)$, $P(B)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει

$$(P(\Gamma))^2 = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow (P(\Gamma))^2 = \frac{9}{11} \cdot \frac{3}{11} \Rightarrow (P(\Gamma)) = \pm \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{11^2}}$$

άρα $P(\Gamma) = \frac{3\sqrt{3}}{11}$ γιατί $0 \leq P(\Gamma) \leq 1$

Θέμα 4^ο

Οι πλευρές x_1 , x_2 , ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \quad \lambda \in (0, 4)$$

α. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . **Μονάδες 6**

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$. **Μονάδες 7**

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; **Μονάδες 6**

Απαντήσεις

$$\text{Αφού } x_1, x_2 \text{ είναι οι ρίζες της εξίσωσης τότε } x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}{1} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\text{και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

α. i. Η περίμετρος Π του ορθογωνίου με πλευρές x_1, x_2 είναι $\Pi = 2(x_1 + x_2) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$

ii. Για το εμβαδόν ισχύει $E = x_1 \cdot x_2 = 16$.

β. $\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$ ισχύει για κάθε $\lambda > 0$ από εφαρμογή του

σχ. βιβλίου.

γ.

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

άρα $\lambda = 1$

Για $\lambda = 1$ η αρχική εξίσωση γίνεται

$$x^2 - 4(1+1)x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \text{ δηλαδή η εξίσωση έχει διπλή}$$

ρίζα $x = 4$ άρα οι πλευρές του ορθογωνίου $x_1 = x_2 = 4$ δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.